

Advanced General Physics 1

성균관대학교 물리학과 한 정훈

중력

도입: 모든 질량을 가진 물체 사이에는 서로 끌어 당기는 힘이 존재하는 데 이 힘의 크기는 각 물체의 질량에 비례하고 물체 사이의 거리의 제곱에 반비례한다.

$$\vec{F}_{12} = Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

지구와 사과 사이에 작용하는 힘을 표현하면 $\frac{GM_E m_a}{R^2} \equiv gm_a$ 즉 중력 가속도 g 는 우주의 기본 상수 중 하나인 G 와 지구의 질량 지구의 반지름 R 이 섞여서 얻어지는 양이다. 뉴턴보다 약 100년 뒤 탄생한 실험 과학자 캐번디쉬는 아래 그림과 같은 방법으로 G 값을 결정하였다고 한다.

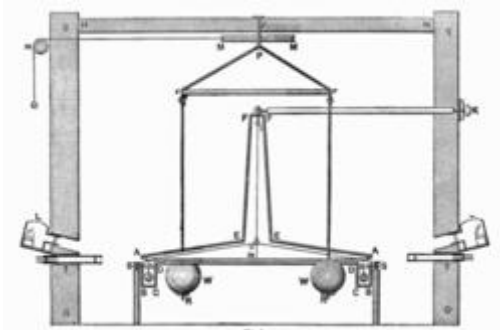


그림 1 캐번디쉬 실험

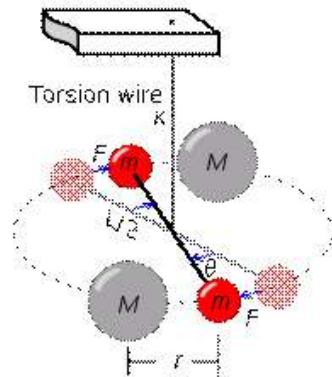


그림 2 캐번디쉬 실험의 개략도

캐번디쉬 실험을 원리를 간단히 살펴보자. 후크의 법칙을 철사에 적용하면 철사의 양 팔에 적용되는 회전력은 철사의 회전각 θ 에 비례한다. 이를 식으로 표현하면

$$\kappa\theta = LF = L\left(\frac{GMm}{r^2}\right).$$

여기서 수평 철사의 길이는 L 로, 작은 질량 m 과 큰 질량 M 사이에 작용하는 중력은 F 로 표시하였다. 철사의 회전력 상수 κ 값은 철사의 회전 주기를 측정함으로써 얻을 수 있다. 따라서 회전각도 θ 를 거리 r 의 함수로 잘 측정하면 위의 식으로부터 $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ 값을 얻어낼 수 있다.

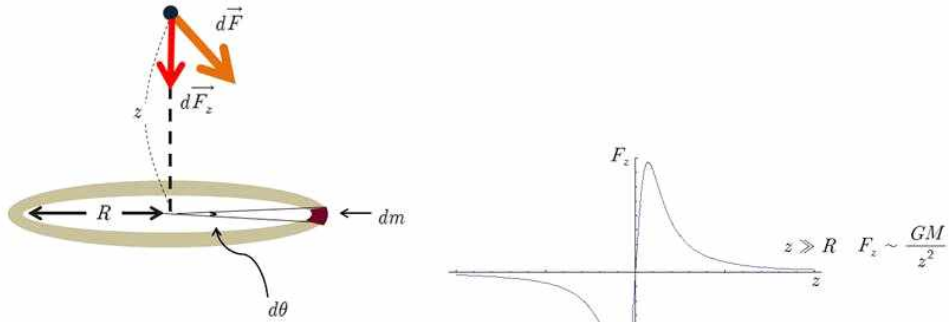
캐번디쉬는 본인의 실험 결과를 통해 지구의 질량을 얻을 수 있다고 주장하였다. 즉

$$\frac{GM_E}{R^2} \equiv g \text{ 에 이미 알려진 지구의 반지름 값 } R \approx 6.38 \times 10^6 \text{m} \text{를 대입하면 지구 질량은 대략}$$

$M_E \approx 6 \times 10^{24} kg$ 이 된다.

물론 실제 지구는 점이 아니다! 그러나 지구의 각 점으로부터 가해지는 힘을 평균해 보면 지구의 질량 중심 위치에 모든 지구 질량이 집중된 것과 같은 힘을 준다. 뉴턴이 이것을 본인의 저서 프린키피아에서 최초로 증명했으며 우리는 이를 아래에서 적분법과 가우스 법칙을 이용해 증명하게 될 것이다.

적분을 통한 중심력 증명: 균일한 밀도의 구가 만들어 내는 힘을 구하기 위해서는 우선 아래와 같은 고리 모양의 질점 분포가 주는 힘을 구해야 한다. 고리의 중심으로부터 수직으로 거리 z 만큼 떨어진 지점에서의 힘을 구하는 과정을 아래 그림과 같다. 대칭성 때문에 알짜 힘의 z 성분만이 유효한 값을 갖게 된다. 적분 결과는



물체 질량 = 1
 고리 질량 : m
 선밀도 : λ
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $\lambda dl = \lambda R d\theta$

$$dF_z = \frac{Gdm}{z^2 + R^2} \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{Gz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \lambda R d\theta$$

$$F_z = \int_0^{2\pi} dF_z = \frac{2\pi R \lambda Gz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{m Gz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} (\because 2\pi R \lambda \equiv m)$$

그림 3 고리에 의한 중력장 계산

1단계 적분: 고리 형태의 질량

$$F_z(z) = \frac{m Gz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

매우 먼 거리에서는 힘이 $F_z(z) \rightarrow \frac{mG}{z^2}$ 꼴로 수렴하여 점 입자에 의한 힘과 동일해진다.

2단계 적분: 원반 형태의 질량

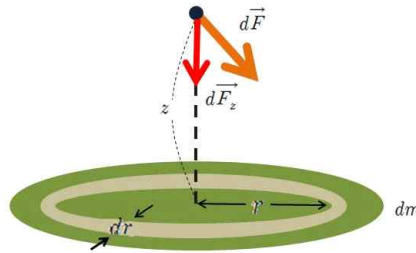
원반의 한 가운데로부터 수직 방향으로 z 만큼 떨어진 점에 미치는 중력장을 계산해 본다. 원반을 구성하는 각각의 고리에 대해서는 앞서 얻어진 결과를 적용할 수 있으므로

$$dF_z(z) = \frac{Gz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dm = \frac{Gz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \rho(2\pi r dr)$$

이 된다. 이 결과를 $0 < r < R$ 구간에 대해 적분하면

$$F_z(z) = 2\pi\rho G \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) = \frac{2MG}{R^2} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

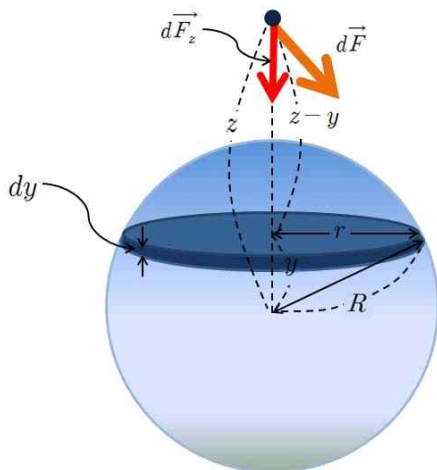
이 얻어진다.



3단계 적분: 구 형태의 질량

구의 한 단면을 아래 그림과 같이 보면 원반이 얻어진다. 주어진 원반과 질점 사이의 거리는 $z-y$ 구의 중심으로부터 원반까지의 수직 거리는 y 이다. 위에서 얻어진 식을 이용하면 원반이 만드는 힘의 크기는

$$dF_z(z, y) = \frac{2G}{R^2} \left(\frac{z-y}{|z-y|} - \frac{z-y}{\sqrt{(z-y)^2 + R^2}} \right) dM(y).$$



그리고 미세 질량은 체적 밀도 ρ 를 이용하면 $dM(y) = \rho(\pi r^2 dy) = \pi\rho(R^2 - y^2)dy$ 가 된다. 이 표현을 위의 식에 대입하고 $-R \leq y \leq R$ 구간에 대해 적분하면 힘은 $F_z(z) = \frac{GM}{z^2}$ 으로 얻어진다. 즉 모든 질량이 구의 중심에 있을 때와 같은 힘이 얻어진다.

가우스 법칙을 통한 중심력 증명: 전기장이나 중력장과 같은 벡터장이 있다고 하면, 이에 대한 선속, 혹은 다발의 개념을 정의할 수 있다. 비유로 말하자면 흐르는 물속에 고리 모양의 철사를 집어넣고 단위 시간 동안 그 철사 고리를 통과하는 물의 양을 측정한다고 하자.

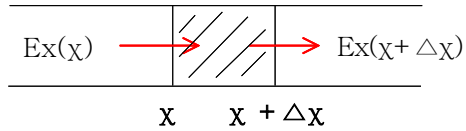


그림 6 1차원 유속

예를 들어 1차원적 길을 통해 흐르는 유체를 아래와 같이 생각해 보면 빗금친 영역에 쌓이는 유체의 양은 (유입된 유체의 양)-(빠져 나가는 유체의 양)이 될 것이므로

$$E_x(x + \Delta x) - E_x(x) \approx \Delta x \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

와 같은 식으로 표현될 것이다. Δx 와 같은 작은 길이가 아니라 유한한 길이, 즉 $a < x < b$ 구간에 쌓이는 물의 양을 생각해 보면 이 양은 위 표현에 대한 적분이 된다.

$$\sum_{\Delta x} \Delta x \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x} \rightarrow \int_a^b \frac{\partial E_x}{\partial x} dx = E_x(b) - E_x(a).$$

여기서 중간값 $E_x(x)$, $a < x < b$ 들이 상쇄되는 이유는 자명하다. 한 쪽 벽을 통해 나오는 유체는 바로 다음 벽으로 들어갈 수 밖에 없기 때문이다. 따라서 어떤 구역 안에 쌓이는 유체의 양은 오로지 양 경계면을 통해서 유입되거나 빠져나가는 유체의 양에만 의존하게 된다.

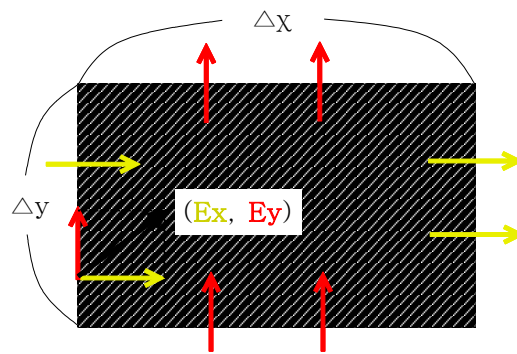


그림 7 2차원 유속

위와 같이 주어진 공간을 채우는 물질 양의 시간 변화율은 공간을 둘러싼 경계를 통해 유입되는 알짜 물질의 흐름으로 주어지는 것이 상식적으로 볼 때 자명하다. 이제 2차원의 작은 면적 $\Delta A = \Delta x \Delta y$ 를 통해 빠져나가는 유체의 양을 생각해 보자. 이제는 전기장 혹은 속도 벡터의 방향도 x, y 두 방향이 모두 가능해진다: $\vec{E} = (E_x, E_y)$. 이 중 y -방향으로 나란한 단면을 통해 들어오는 유체의 양은 오직 전기장의 x -성분에 비례하고 그 양은 $E_x(x, y) \Delta y$ 가

된다. 마찬가지로 x -방향으로 나란한 단면을 통해 들어오는 유체의 양은 전기장의 y -성분에만 비례하게 되고 그 양은 $E_y(x,y)\Delta x$ 가 된다. 방향까지 모두 고려하여 면적 $\Delta A = \Delta x\Delta y$ 에 쌓이는 유체의 양을 계산해 보면

$$(E_x(x + \Delta x, y) - E_x(x, y))\Delta y + (E_y(x, y + \Delta y) - E_y(x, y))\Delta x \approx \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y.$$

유한한 면적 A 에 쌓이는 유체의 양은 위 양의 합, 또는 적분으로 주어진다.

$$\sum \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \rightarrow \int \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) dx dy.$$

이때의 적분 구간은 어떤 닫힌 면적이 되고 따라서 주어진 경계(선)이 잘 정의되어 있어야 한다. 1차원의 경우와 마찬가지로 주어진 영역 내부에서는 출입하는 유체의 양이 서로 상쇄되기 때문에 결국 경계(선)를 통해 빠져나가는 유체의 양이 영역 내부에 쌓이는 유체의 양을 결정할 것이다. 수학적으로 말하면 위에 적은 2차원 적분은 어떤 형태로든 영역 둘레에 대한 1차원 적분으로 변환할 수 있어야 한다. 아마도 그 답은

$$\int_A \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial A} \vec{E} \cdot \vec{dn}$$

을 의미하고 \vec{dn} 벡터는 그 방향이 경계선에 수직인 길이 요소 벡터이다. 이 관계식은 아래 논의할 가우스 법칙의 특별한 경우로 이해할 수 있다.

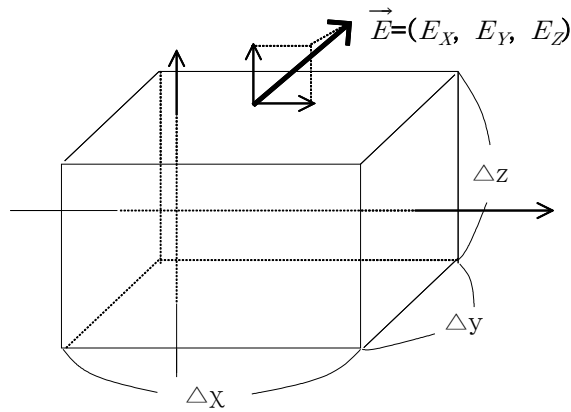


그림 8 3차원 유속

위 그림과 같은 체적 $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$ 인 3차원적 육면체를 가정하고 1,2차원에서와 유사한 논의를 적용해보면 주어진 체적 요소 안에 쌓이는 유체의 양은

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

이 되고, 이것을 합하면

$$\int \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dx dy dz$$

이 된다. 1, 2차원에서의 논의와 마찬가지로 적분 체적 내부에서는 들고 나는 유체의 양이 서로 상쇄되어 유일하게 상쇄되지 않는 영역은 적분 체적의 표면이 된다. 즉

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dx dy dz = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

이 되어야 할 것이다. 이 관계식이 바로 가우스 정리다. 일반적인 벡터장 (꼭 전기장일 필요가 없다)에 대해 가우스 정리는 성립한다.

이제 가우스 정리를 질점으로부터 발생하는 중력장에 적용시켜 본다. 중력장은 단위 질량에 작용하는 중력을 의미한다. “장”이란 모든 공간에 대해 정의된 물리량을 가리킬 때 사용하는 용어다. 흔히 폐곡면을 통해 나오는 중력 다발을 $\Phi = \int \vec{F} \cdot d\vec{S}$ 로 표기한다. 원점에 위치

한 단위 질점이 만드는 중력장은 $\vec{F}(\vec{r}) = G \frac{\hat{r}}{r^2}$ 이다. 원점을 중심으로 하는 반지름 R 인 구를 적분 표면 삼아 적분을 해보면 $\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = F(R)(4\pi R^2)$ 이 됨을 알 수 있다. 그런데

같은 중력장 벡터에 대해 $\nabla \cdot \vec{F} = 3G \frac{\hat{r}}{r^3} - 3G \frac{\hat{r}}{r^3} = 0$ 임을 금방 확인할 수 있다. 따라서 가우스 법칙이 성립하는 않는 것으로 보인다. 이와 같은 난관을 해결하고 가우스 법칙이 여전히 유효성을 유지하려면 우리는

$$\nabla \cdot \vec{F} = 4\pi G \delta(\vec{r})$$

임을 가정해야 한다. 여기에 도입한 δ -함수 $\delta(\vec{r})$ 는 질점에 해당하는 밀도 함수이다. 따라서 체적 적분을 질점을 포함하는 구역에 대해서 하면 그 적분 결과가 1, 질량점을 포함하지 않는 구역에 대한 적분 결과는 0이 되어야 한다. 이제는 질점이 만드는 중력장도 가우스 법칙을 만족하게 된다. 뿐만 아니라 적분 영역이 점전하를 원점에 둔 구 모양이 아니어도 적분 결과는 항상 똑같다는 사실을 알 수 있다. 즉 원점을 포함한 임의의 적분 체적 V 에 대해서

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi G \int_V \delta(\vec{r}) dV = 4\pi G$$

가 성립한다.

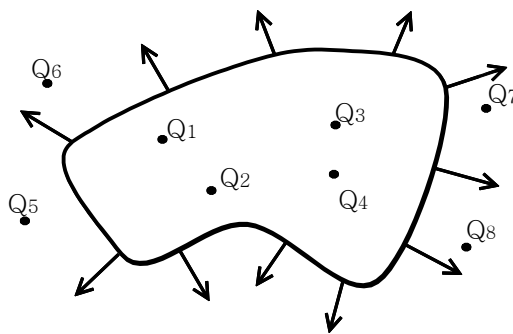


그림 9 질점들의 모임과 가우스 폐곡선

점전하의 집합에 대해서는 $\nabla \cdot \vec{F} = 4\pi G \sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$, 일반적인 연속적 질량 분포에 대해서

서는 $\nabla \cdot \vec{F} = 4\pi G \rho(\vec{r})$ 이 성립한다. 따라서 가우스 법칙에 따르면 중력장이 만드는 유속의

양은 폐곡면 안에 포함된 총 질량에 정확히 비례한다.

$$\Phi = \int \vec{F} \cdot d\vec{A} = 4\pi GM.$$

가우스 법칙의 응용: 가우스 법칙이 주는 중요한 교훈 중 하나는 구면 대칭을 만족하는 연속적인 질량 분포는 동일한 질량을 띤 질량점과 정확히 똑같은 중력장을 발생한다는 점이다. 연속적인 밀도분포 함수 $\rho(r)$ 을 생각한다. 이 함수는 오직 원점에서의 거리 r 에만 의존한다. 이러한 밀도분포로부터 발생하는 중력장은 원점에서의 지름 방향(radial direction)을 향할 것이고 그 크기는 원점에서의 거리에만 의존할 것이다. 따라서 중력선속에 대한 가우스 법칙을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{A} = F(r)4\pi r^2 = GM(r).$$

따라서 중력장의 크기는 정확히 $F(r) = GM(r)/r^2$ 이 된다. 이 결과는 정확한 밀도 분포에 는 무관하고 오직 반지름 r 내부에 쌓여있는 총 질량 $M(r)$ 에만 비례한다.

지구나 태양과 같은 천체를 대략 완벽한 구라고 취급하고 그 밀도 분포 역시 구면 대칭을 가정하면 각 물체에서 발생하는 중력장은 마치 모든 질량이 그 물체의 중심에 점입자 꼴로 모여 있는 것과 같은 꼴이 된다. 따라서 매우 거시적인 물체인 태양과 지구 사이의 중력 상호 작용도 두 점입자의 상호 작용과 똑같은 법칙을 만족하게 된다.

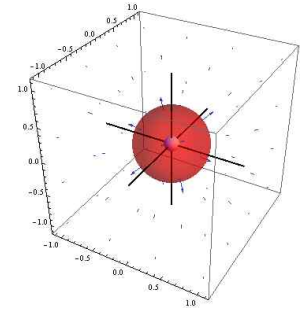


그림 10 구면 형태의 질량 분포에 대한 가우스 법칙 적용

원통대칭성을 만족하는 임의의 밀도 분포의 경우 원통 축으로부터의 거리 r 지점의 지름 방향 중력장(다른 방향으로는 중력장이 존재할 수 없다)의 크기가

$$F(r)2\pi r = 4\pi G \int_0^r \rho(r')2\pi r' dr' \quad \text{즉}$$

$F(r) = (4\pi G/r) \int_0^r \rho(r')r' dr'$ 로 주어진다. 따라서 선밀도 λ 로 질량이 균일하게 분포되어 있는 막대의 경우 중력장의 세기는 $F(r) = 2G\lambda/r$ 로 주어진다.

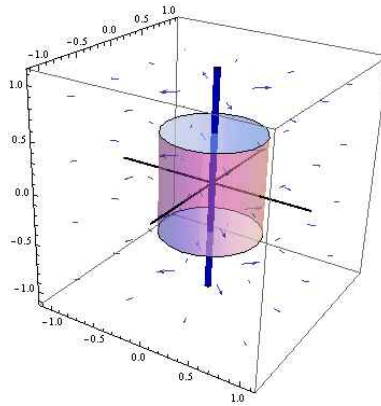


그림 11 선질량 분포에 대한
가우스 법칙 적용

무한히 큰 평면판에 균일한 밀도 σ 가 분포되어 있다고 하자. 가우스 법칙을 적용하면 평면판으로부터의 거리에 상관없이 중력장의 크기는 항상 $F=2\pi G\sigma$ 임을 알 수 있다.

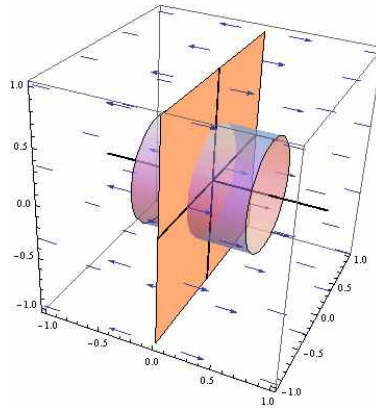


그림 12 무한 평면에 대한 가
우스 법칙 적용

비슷한 논의를 금속 표면의 아직 작은 부위에 적용해 보면 금속 표면에 수직인 전기장의 세기는 표면의 전하 밀도에 대해 $E=\sigma/\epsilon_0$ 의 관계가 된다. 이는 금속 내부 쪽으로는 전기장이 존재하지 않기 때문이다. 샌드위치 형태로 쌓인 전하 밀도 분포 함수 $\sigma(x)$ 에 대해서는 일반적으로 다음 관계가 성립한다.

$$E(x_2) - E(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x) dx / \epsilon_0.$$

이를 바꿔 표현하면 $\frac{dE}{dx} = \frac{\sigma(x)}{\epsilon_0}$ 이 된다.

중력 포텐셜 에너지: 중력 포텐셜 에너지 $V(y) = mgy$ 는 일정한 힘 $F = mg$ 을 거슬러 어떤 물체를 높이 y 만큼 올리는 데 필요한 일. 일반적으로 중력 값은 y 의 함수이기 때문에 위치에너지 또한 적분 형태로 주어져야 맞다. 가령 지상($r=R$)에서 높이 y ($r=R+y$)까지 물체를 움직이는 데 드는 일은

$$\int_R^{R+y} F(r)dr = GM_E m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+y} \right) = GM_E m \frac{y}{R(R+y)}$$

로 주어진다. 이 양은 곧 물체의 위치 에너지에 해당된다. 다만 충분히 높이가 적은 경우 $y \ll R$ 이므로 윗 식을 근사적으로

$$GM_E m \frac{y}{R(R+y)} \approx \frac{GM_E m}{R^2} y = mgy$$

로 쓸 수 있게 되어 이전의 결과를 다시 얻을 수 있다. 하지만 인공 위성이나 우주 정거장 같은 높은 궤도를 운동하는 물체에 대해서는 이 근사식을 쓸 수 없다. 일반적으로 지구 중력을 받는 물체의 위치 에너지는

$$V(y) = GM_E m \frac{y}{R(R+y)}$$

로 써야 한다. 지구 중력장의 영향 아래 움직이는 물체의 총 에너지 보존도 마찬가지로

$$\frac{1}{2} m \vec{v}^2 + GM_E m \frac{y}{R(R+y)} = \text{일정}$$

형태로 써야한다. 예를 들어 탈출속도란 개념을 생각해 보자. 지구를 완전히 빠져나가도록 대포알을 쏘려면 초기속력이 얼마여야 하는가? 에너지 보존 법칙에 따르면

$$\frac{1}{2} m [v(0)]^2 - \frac{1}{2} m [v(y)]^2 = GM_E m \frac{y}{R(R+y)}$$

을 만족한다. 만약 유한한 높이에서 속도가 0이 된다면 대포알은 지구로 다시 돌아올 수 밖에 없다. 즉 $y = \infty$ 에서 속도가 0이 되는 상황에서만 지구 탈출이 가능하다. 윗 식에서 $y = \infty$ 까지 도달한 대포알의 경우

$$\frac{1}{2} m [v(0)]^2 = GM_E m$$

이므로 초기 속도가 최소한

$$\sqrt{2GM_E/R} = \sqrt{2gR}$$

을 넘어야만 지구 탈출이 가능해진다. 지구의 경우 이 값은 대략 $1.12 \times 10^4 m/s$ 이다.

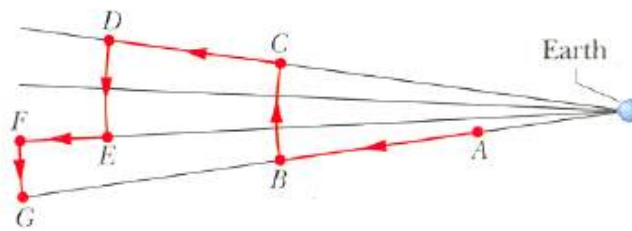


그림 13 위치 에너지 구하는 법

앞서 중력 포텐셜 에너지를 구할 때 물체를 수직으로 올리는 경우를 생각했지만 일반적으로 위의 그림과 같이 임의의 경로를 따라 물체를 이동하는 경우도 결국 위치 에너지는 지구 중심으로부터의 높이에만 의존함을 알 수 있다.

지구 중심을 통한 여행1): 지구 중심으로부터 거리 r 에 있을 때 물체 m 이 느끼는

힘은 $F(r) = GmM(r)/r^2$. 여기서 $M(r)$ 은 반지름 r 안에 들어 있는 질량이고 지구의 평균 밀도 ρ 에 대해 $M(r) = \rho(4\pi/3)r^3$ 관계를 만족한다. 따라서

$F(r) = GmM(r)/r^2 = \frac{4\pi\rho Gm}{3}r$ 이 되어 물체의 운동 방정식은

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{4\pi\rho G}{3}r,$$

즉 용수철 운동과 동일한 방정식을 만족한다. 진동 주기는 위 식으로부터 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{4\pi\rho G}{3}}$ 로 구할 수 있다.

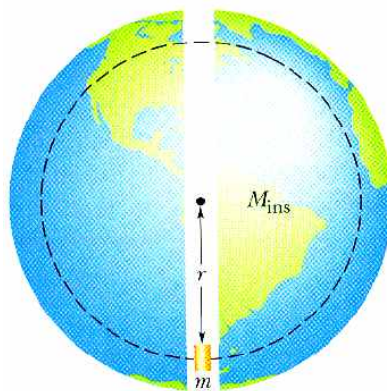
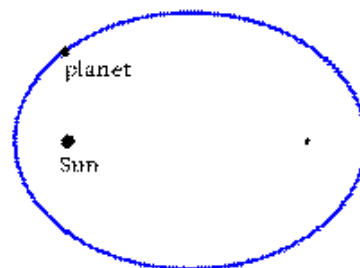


그림 14 지구 관통 여행

Kepler's laws: Kepler proposed the three laws pertaining to the motion of the planets around the sun.

(1) The law of orbits: All planets moves in elliptical orbits, with the Sun at one focus.



(2) The law of areas: A line that connects a planet to the Sun sweeps out equal areas in the plane of the planet's orbit in equal time intervals; that is, the rate dA/dt at which it sweeps out area A is constant. - It is in fact the conservation of

1) In 1904 George Griffith, an English novelist, wrote a science fiction called 'From pole to pole' in which three explorers tunnel through the earth from the south pole to the north pole in a capsule.

angular momentum. The angular momentum of the planet of mass m is

$$L = rp = r(mv) = mr^2\omega = mr^2\frac{d\theta}{dt}.$$

The area swept out in the incremental change of the angle $\Delta\theta$ is $\Delta A = r^2\Delta\theta/2$. The time rate of change is thus

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{L}{2m}.$$

If L is a constant, so is dA/dt .

(3) The law of periods: The square of the period T of any planet is proportional to the cube of the semimajor axis R of its orbit. - In fact the same law applies for satellites orbiting the earth, too. Since the eccentricity of the planets are very

small, we assume the circular orbit where $\frac{GmM}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. From

$$vT = 2\pi R, \text{ the period comes out } T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}.$$

문제:

[1] 우주 여행을 하는 도중 미지의 별에 도착했는데, 이 별의 질량은 지구와 똑같지만 무게는 지구에서보다 두 배만큼 나가는 것으로 나타났다. 이 별의 반지름은 얼마인가?

[2] 질량 100톤의 우주 왕복선이 지구 중력권을 완전히 벗어나기 위해서는 얼마나 많은 에너지를 소모해야 하는가.

[3] 지구 중심을 관통하는 터널이 있다면 한 번 왕복에 걸리는 시간은 얼마인가. 지구의 밀도는 균일하고 지구의 모양은 완벽한 구형이라고 가정한다.

[4] 지구 표면으로부터 높이 R ($R =$ 지구 반지름) 만큼 떨어져 있는 인공 위성이 지구를 한 바퀴 도는데 걸리는 시간(주기)을 구하여라. 지구의 자전 주기(24시간)와 같은 주기로 움직이는 인공 위성은 얼마의 고도에서 움직여야 하는가.

[5] Joule Verne는 소설에서 그는 대포알을 타고 달에 도착하는 상황을 상상하였다. 지구와 달의 질량을 각각 M_E, M_M 이라고 하고, 각 행성의 반지름은 R_E, R_M , 두 행성 사이의 거리를 R 이라고 할 때 달에 최종 속도 $v_f = 0$ 으로 도착하는 대포알을 발사하려면 지구에서의 발사 속도는 얼마이어야 하는지 계산하시오. [지구 중력과 달의 중력에 의한 포텐셜 에너지를 동시에 고려해야 한다.]

[6] 두 물체 사이의 새로운 힘을 연구하던 물리학자 X는 이 힘이 두 물체의 질량에 비례함을 알았다. 그리고 물체 사이의 거리가 1m 증가할 때마다 힘은 1/2로 감소함을 알았다. 1kg 까지 물체 두 개가 거리 1m 떨어져 있을 때 두 물체에 존재하는 힘은 1000N 으로 측정되었다. 이 물리학자가 발견한 힘을 식으로 표현하여라.

[7] 적분을 통해 균일한 밀도의 구가 만드는 중력장의 세기는 모든 질량이 구의 한 가운데 집중되어 있을 때의 중력장 값과 동일함을 보여라.

진동

도입: 어떤 물체가 정지(평형) 상태에 있다면 그 물체가 받고 있는 알짜 힘과 알짜 회전력은 0이란 뜻이다. 만약 그 물체가 이와 같은 평형 상태에서 조금 벗어난다면 알짜 힘 역시 0에서 조금 벗어난 값을 갖게 된다.

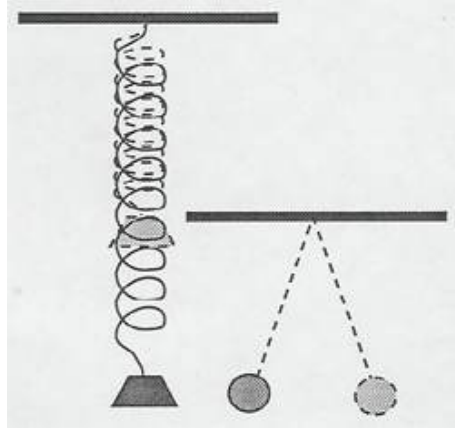


그림 16 단순 조화 진동의 예

만약 힘이 물체를 평형 상태에서 더 멀어지게 하는 쪽으로 작용한다면 그 물체는 영영 본래 상태로 복원되지 못할 것이다. 그러나 힘이 물체를 평형 상태로 되돌리는 방향으로 작용한다면 물체는 평형 상태를 중심으로 왔다갔다를 반복하는 단순 조화 진동을 수행하게 된다.

1차원의 예로 들어보자. 어떤 물체가 만족하는 운동 방정식은 일반적으로 $m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$ 로 주어지는데 $x = x_0$ 에서의 힘은 사라진다고 하자: $F(x = x_0) = 0$. 이 지점 근방에서 힘의 함수를 테일러 전개하면 $F(x) \simeq (x - x_0)F'(x_0)$ 가 되고, 상수 $F'(x_0)$ 를 $-k$ 라고 정의하고 거리를 x_0 로부터 측정하여 $(x - x_0) \rightarrow x$ 로 놓게 되면 운동 방정식은

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

꼴로 주어진다. 이 (미분) 방정식은 간단한 해를 갖는데, $k/m \equiv \omega^2 (\omega > 0)$ 로 다시 정의했을 때 해는 $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, 혹은 $A \cos(\omega t + \alpha)$ 라는 꼴로 주어진다. 여기서 등장하는 숫자 ω 는 각속도의 의미를 갖는다. 즉 주기 운동이 한 주기를 완성하는 데 걸리는 시간 T 에 대해 $\omega T = 2\pi$ 관계가 성립하고, 따라서

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

를 얻는다.

조화 진동 운동의 경우 보존되는 총 에너지가 무엇인지 알기 위해서 운동 에너지의 시간 변위를 계산해 보면,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = v \left(m \frac{dv}{dt} \right) = -kxv = -\frac{1}{2} k \frac{d}{dt} (x^2),$$

따라서 보존되는 총 에너지는 $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ 이다.

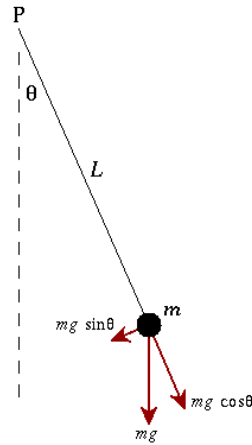


그림 17 단순진자운동

위 그림과 같은 시계추 운동은 중력이 복원력을 제공한다. 운동은 줄의 길이에 해당하는 반지름을 갖는 원주 상에서만 가능하므로 변위에 영향을 주는 힘 역시 원의 접선 방향 힘이다. 운동 방정식은

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta$$

로 주어진다. 변위의 폭이 크기 않은 경우 $\sin\theta \approx \theta$ 로 근사할 수 있다. 따라서 작은 진폭에 대한 운동 방정식은 조화 진동의 방정식,

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

으로 주어진다. 따라서 진동 주기는 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ 가 될 것이다.

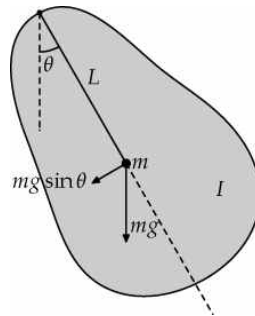


그림 18 물리적 진자

실제 진자는 위의 그림과 같이 질량이 한 점에 집중되어 있지 않다. 고정점으로부터 무게 중심까지의 길이를 L 이라고 하면 각도 θ 만큼 돌렸을 때의 회전력은 $\tau = -mgL \sin\theta$ 가 되고, 따라서 운동 방정식은

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL \sin\theta \approx -mgL\theta \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

마지막 수식에서 $\theta \ll 1$ 인 근사를 하였다. 윗 식을 이용하면 복잡한 물체 (가령 사람의 다리)

의 회전 질량을 실험적으로 구할 수 있다. 사람의 걸음걸이를 흔들리는 시계추에 비유하면 두 걸음을 걷는 데 필요한 시간 T 를 대략 진자의 주기와 동일시할 수 있다. 움직이는 거리는 대략 $2L$ 정도이므로 움직이는 속도는 $v = 2L/T \approx \sqrt{mgL^3/I}$. 어린이나 어른 모두 체형은 비슷하므로 $I/mL^2 = \kappa$ 은 공통된 상수로 볼 수 있다. 따라서 인간의 걷는 속도는 $v \approx \sqrt{gL/\kappa}$, 즉 키에 비례하지 않고 키의 제곱근에 비례한다. 어른과 어린이의 걷는 속도는 비슷하다.

감쇄 진동: 실제 진동 운동은 마찰에 의해 진폭이 조금씩 줄어든다. 마찰 효과를 운동 방정식으로 표현하면

$$F = -kx - bv = -kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

가 된다. 이를 다시 정리하면

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

와 같은 미분 방정식이 얻어진다. 위 식에서 만약 $\gamma = 0$ 이면 먼저와 같이 $x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$ 와 같은 답이 얻어질 것이고, 만약 $\omega^2 = 0$ 이면 $x(t) = A' \exp(-\gamma t)$ 가 얻어진다. 둘 다 0이 아닌 경우는 이 두 가지 함수의 곱, 즉

$$x(t) = A \exp(-\gamma t/2) \cos(\omega' t + \alpha); \omega'^2 = \omega^2 - \frac{1}{4}\gamma^2$$

꼴로 답을 얻을 수 있다. 감쇄 진동에서는 총 에너지도 시간에 따라 감소한다. 총 에너지

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \text{의 시간 변화율을 구해 보면}$$

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2 < 0$$

이어서 단조 감소함을 알 수 있다.

복소수 지수 함수를 이용한 풀이: 복소수 평면에서의 숫자 $z = x + iy$ 는 극좌표계로 표현하면 $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ 가 된다. 따라서 $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ 로 묶어서 표현할 수 있다. 오일러가 발견한 공식에 따르면 $\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}$ 가 된다. 임의의 복소수는 그 크기와 위상에 의해 $z = re^{i\phi}$ 로 표현할 수 있게 된다.

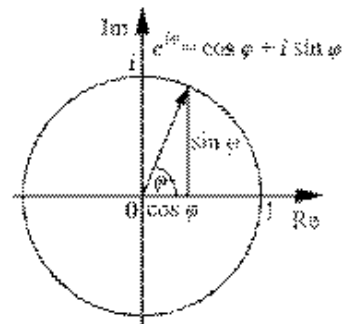


그림 19 복소수 평면

이 개념을 좀 더 확장하면 지수 자체가 복소수인 경우도 생각할 수 있다. 이 경우

$$e^{\phi_1 + i\phi_2} = e^{\phi_1} \times e^{i\phi_2} = e^{\phi_1} \times (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$$

로 풀이할 수 있다.

감쇄 진동자의 운동 방정식 $\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$ 을 복소수 지수 함수 방법으로 쉽게 풀 수 있다. 우선 $x(t) = \text{Re}[e^{int}]$ 라고 가정하자. 여기서 η 는 아직 정해지지 않은 어떤 복소수이다. 이 표현을 운동 방정식에 대입하면

$\text{Re}\left[\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega^2\right)e^{int}\right] = 0$ 가 된다. 따라서 우선 $\left[\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega^2\right]e^{int} = 0$ 을 만족하는 어떤 복소수 지수 함수 e^{int} 를 찾으면 이 함수의 실수부를 취함으로써 원하는 답 $x(t) = \text{Re}[e^{int}]$ 를 자동적으로 찾을 수 있게 된다. 지수 함수에 대한 미분을 대단히 간단하다. 결과는

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega^2\right]e^{int} = [-\eta^2 + \gamma\eta + \omega^2]e^{int} = 0 \text{ 이 되어 결국 2차 방정식}$$

$$\eta^2 - i\gamma\eta - \omega^2 = (\eta - i\gamma/2)^2 + (\gamma/2)^2 - \omega^2 = 0$$

을 만족하는 근을 찾으면 된다. 두 개의 해가 가능한데

$$\eta_{\pm} = i\gamma/2 \pm \sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2} = i\gamma/2 \pm \omega'$$

로 각각 주어진다. 따라서 가능한 해는

$$x_{\pm}(t) = \text{Re}[e^{-(\gamma/2)t} e^{\pm i\omega' t}] = e^{-(\gamma/2)t} \text{Re}[e^{\pm i\omega' t}]$$

가 된다. 이 결과는 먼저 얻은 결과와 일치한다.

강제 진동과 공명: 감쇄 진동의 경우에도 외부에서 구동력을 주기적으로 걸어주면 진폭이 줄지 않는다.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_d \cos[\omega_d t].$$

이러한 방정식에 대한 해를 구해 보면 그 진폭은

$$A = \frac{F_d}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_d^2)^2 + (\gamma\omega_d)^2}}$$

으로 주어지게 된다. 구동 진동수 ω_d 가 자연 진동수 ω 에 가까울수록 진폭은 커진다. 아주 작은 힘을 이용해서도 큰 진폭을 얻을 수 있다. 이런 현상을 공명이라고 하는데, 건축물이나 기계의 부품은 공명이 일어나지 않도록 설계하는 것이 중요하다. 가령 비행기 날개의 자연 진동수와 엔진의 진동수는 서로 엇갈리게 설계해야 한다. 많은 수의 군인들이 다리를 지날 때는 일부로 발걸음 흘트리기도 한다. 미국의 타코마 다리가 붕괴한 이유도 협곡을 지나 는 바람의 진동수가 다리의 자연 진동수와 서로 맞아 떨어져서 일어난 공명 현상의 결과로 보고 있다.

문제:

[1] 조화 진동자의 해 $x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$ 를 이용하여 총 에너지 $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ 가

시간에 대해 변하지 않음을 증명하여라. 그리고 총 에너지 값을 구하여라.

[2] 감쇄 진동에 대한 운동 방정식을 만족하는 답이 교재에 적힌 표현임을 유도하시오.

[3] 오른 쪽의 단순진자 운동을 2차원 운동 입장에서 다시 분석해 보자. 우선 2차원 성분 별로 운동 방정식을 적어보면 $m\ddot{x} = T_x = -T\sin\theta$, $m\ddot{y} = T_y - mg = T\cos\theta - mg$ 로 주어진다. 여기서 T 는 장력의 세기이다. 원궤도를 따라 운동해야만 하는 제약 조건 때문에 좌표를 $(x,y) = L(\sin\theta, -\cos\theta)$ 로 쓸 수 있다. 이를 운동 방정식에 대입하여 θ 가 만족하는 운동 방정식과 $T(\theta)$ 를 유도하여라.

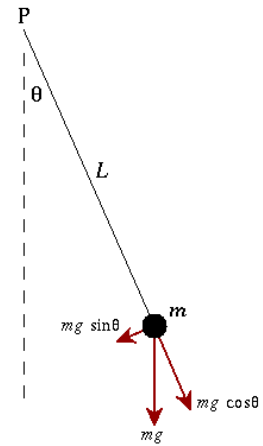


그림 20 단순진자운동

[4] 평면 상에서 원운동하는 물체의 운동을 위와 같은 방식으로 분석하여라. 우선 운동 방정식을

$$m\ddot{x} = T_x = -T\cos\theta,$$

$$m\ddot{y} = T_y = -T\sin\theta$$

로 놓은 뒤 $(x,y) = R(\cos\theta, \sin\theta)$ 조건을 대입하여라. 이로부터 θ 가 만족하는 운동 방정식과 $T(\theta)$ 를 유도하여라.

[5] 오일러의 공식 $\cos\phi + i\sin\phi = e^{i\phi}$ 이 옳은지 검증하기 위해 다음을 확인해 보아라. (i) 식의 좌우변을 변수 ϕ 에 대해 미분한 결과가 같음을 보여라. (ii) 위상 값이 $\phi \rightarrow \phi + \pi$ 로 변했을 때의 결과가 양변이 일치함을 보여라.

[6] 강제 진동에 대한 운동방정식 $\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2x = F_d\cos[\omega_d t]$ 의 해를 복소 지수 함수 방법으로 풀어보자. 우선 식의 우변을 $F_d \times \text{Re}[e^{i\omega_d t}]$ 로 두고, 가능한 해를 $x(t) = \text{Re}[Ae^{i\omega_d t}]$ 로 본다. 여기서 A 는 어떤 복소수 상수이다. 이 표현을 식의 좌변에 대입함으로써 A 를 구하고 이로부터 진폭 $|A|$ 가 본문에 나온 결과와 일치함을 보여라.

파동

도입: 진동이 하나의 입자 (또는 물건)의 주기적인 흔들림이라면 파동은 어떤 매질 전체의 흔들림을 말한다. 매질의 종류는 물(수면파), 공기(음파), 지구(지진파) 등 다양하다. 매질의 종류와 상관 없이 주어진 매질의 떨림은 파동 방정식으로 주어진다:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t).$$

여기 등장하는 $y(x,t)$ 는 주어진 위치와 시간 (x,t) 에 일어나는 매질의 변위에 해당한다. 파동 방정식의 유도는 주어진 매질이 무엇이냐에 따라 방법이 조금씩 다르지만 그 결과는 늘 위와 같은 꼴로 표현된다. 1차원 매질의 파동 현상은 위와 같은 식으로, 일반적인 3차원 매질의 파동 현상은 좀 더 복잡한 꼴의 방정식,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x,y,z,t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x,y,z,t)$$

으로 주어진다.

중첩: 우선 이해를 돕기 위해 1차원 파동 방정식을 보면,

$$y(x,t) = A \cos[kx - \omega t + \alpha]$$

꼴의 함수가 방정식을 만족한다는 사실을 금방 알 수 있다. 여기서 진폭 A 와 무관하게 함수는 항상 파동 방정식을 만족하는데, 이와 같은 성질을 가진 미분 방정식을 선형 미분 방정식이라고 한다. 파동이 선형 미분 방정식에 따라 운동한다는 사실은 아주 중요한 물리적 의미를 갖게 되는데, 그 의미는 흔히 “중첩의 원리”(superposition principle)이라고 불린다. 가령 어떤 두 함수 $y(x,t)$ 와 $z(x,t)$ 가 모두 파동 방정식을 만족한다고 하자. 그럼 이들의 조합, 가령 $y(x,t) + z(x,t)$ 도 파동 방정식을 만족한다. 위에서 주어진 함수 $y(x,t)$ 는 $\omega = vk$ 라는 조건을 만족하기만 하면 파동 방정식을 만족한다. 따라서 아래와 같은 임의의 조합,

$$y(x,t) = \sum_n A_n \cos[k_n(x - vt) + \alpha_n]$$

은 모두 파동 함수를 만족하게 된다. 이런 함수는 항상 $y(x,t) = y(x - vt)$ 꼴로 표현할 수 있다. 즉 어떤 파형이 주어졌으면 그 모양이 일정한 속도로 “우”로 이동하는 형태를 취한다. 반대로 $y(x,t) = \sum_n B_n \cos[k_n(x + vt) + \beta_n]$ 꼴도 파동 함수를 만족한다. 이 경우 파형은 “좌” 방향으로 속도 v 를 갖고 이동한다. 물론 이들의 합,

$$y(x,t) = \sum_m A_m \cos[k_m(x - vt) + \alpha_m] + \sum_n B_n \cos[k_n(x + vt) + \beta_n]$$

이 가장 일반적인 파형을 준다.

맥놀이: 파동의 중첩으로 인해 재미있는 현상이 일어나는데, 우선 대표적인 예로 “맥놀이”(beat)를 들 수 있다. 서로 비슷한 파동수 $k - \Delta k$, $k + \Delta k$ 를 갖는 두 파장이 중첩되었다고 하자. 편의상 두 파동의 진폭이 동일하다고 하면 중첩된 파의 꼴은

$$y(x,t) = A(\cos[(k - \Delta k)(x - vt)] + \cos[(k + \Delta k)(x - vt)])$$

이 된다. 수식을 간소화하기 위해 $x - vt = X$ 라고 하고, 위의 함수는 삼각함수 정리를 이용하여

$$y(x,t) = A(\cos[(k - \Delta k)X] + \cos[(k + \Delta k)X]) = 2A \cos[kX] \cos[(\Delta k)X]$$

꼴로 정리된다. 이 함수를 그래프로 그려보면(숙제!) 아주 천천히 변하는 삼각 함수로 “포장”된 내부에 빠르게 변하는 삼각 함수가 진동하는 꼴을 볼 수 있다. 편의상 새로운 진폭 $A(X) \equiv 2A \cos[(\Delta k)X]$ 을 도입하면 맥놀이 현상을 보이는 파동은 그 진폭이 $|A(X)|$ 로 천천히 변하는 것을 알 수 있다.

이번엔

$$y(x,t) = (1 + 2b \cos[\omega_h t]) \cos[\omega_s t]$$

꼴로 주어지는 파동을 생각한다²⁾. 가령 AM(amplitude modulation) 라디오 방송국에서 출력하는 전파의 주파수는 수십만 Hz로써 인간의 귀가 인식할 수 있는 수십에서 수만 Hz 대역을 훨씬 초과한다. 그럼에도 불구하고 우리가 라디오를 “들 수 있는” 이유는 무엇일까?

라디오 방송국에서 송출하는 기본 주파수를 ω_s 라고 하면, 마이크에 사람의 목소리가 울릴 때마다 송출되는 전파의 진폭(amplitude)이 조금씩 바뀐다. 이 진폭은 사람 목소리의 주파수 ω_h 에 따라 바뀐다. 따라서 방송국에서 송출하는 전파의 꼴은 위의 함수와 같은 모양이 된다. 삼각 함수의 성질을 이용하면 위의 함수를

$$y(x,t) = \cos[\omega_s t] + b \cos[(\omega_s + \omega_h)t] + b \cos[(\omega_s - \omega_h)t]$$

꼴로 분해할 수 있다. 인간의 뇌(귀)는 빠른 주파수의 신호를 처리하지 못하므로, 실제로 해독 가능한 파동은 위의 함수가 아니라

$$y(x,t) = b \cos[(\omega_s + \omega_h)t] + b \cos[(\omega_s - \omega_h)t]$$

이다. 이 파동은 대단히 빨리 진동하는 두 개의 파장이 중첩된 꼴이다. 맥놀이 현상으로 인해 파동의 진폭이 서서히 진동하는 꼴, $A = 2b \cos[\omega_h t]$ 로 주어진다. 귀는 이 진폭의 변화를 인식하여 정보(목소리)를 받아들인다.

간섭: 파동의 중첩으로 인한 또 다른 재미있는 현상은 간섭 효과이다. 오른쪽 그림은 두 개의 파원으로부터 발생된 수면파가 중첩되어 일어나는 간섭 현상을 보여준다. 하나의 파원으로부터 발생하는 파동은

$$h_1(x,y,t) = A \cos[r_1 - vt]$$

으로 쓸 수 있다. (편의상 $k=1$ 로 설정하였다.) 여기서 파원의 위치 \vec{r}_1 으로부터 켄 거리 $r_1 = |\vec{r} - \vec{r}_1|$ 이다. 또 다른 파원의 위치를 \vec{r}_2 라고 하면 두 개의 파원으로부터 발생한 중첩된 파동은

$$h(x,y,t) = A(\cos[r_1 - vt] + \cos[r_2 - vt])$$

이 된다. 이 파형을 그림으로 그려보면 오른쪽 그림과 같은 결과를 얻을 수 있다. 어떤 시공간 점에서의 파동 폭은 중첩 효과로 인해 더욱 커지고 (보강 간섭, constructive interference) 어떤 점에서는 작아진다 (상쇄 간섭, destructive interference).



그림 21 두 개의 수면파에 의한 간섭

²⁾ The Feynman lectures on physics, Vol. I, Chap. 48, Sec. 3의 내용이다.

파동 에너지: 파동을 일으키기 위해서는 에너지가 필요하다. 다시 말하면 주어진 파동은 어느 정도의 에너지를 갖고 있다. 이 에너지의 양은 진폭의 제곱에 비례한다. 조화 진동자의 포텐셜 에너지가 변위의 제곱에 비례함을 생각하면 된다. 각 시공간점에서 파동이 갖고 있는 에너지 밀도는

$$e(x,t) \propto |A|^2 \cos^2[kx - \omega t]$$

가 된다. 이것을 모든 공간에 대해 적분해 본다:

$$E(t) \propto |A|^2 \int \cos^2[kx - \omega t] dx = \frac{|A|^2}{2} \int (1 + \cos[2kx - 2\omega t]) dx.$$

첫 번째 항은 적분하면 길이 L 에 비례하는 항을 준다. 두 번째 항은 적분 구간을 어떻게 설정하느냐에 따라 값이 조금씩 바뀌긴 하지만 대략 크기가 1을 넘지 못한다. 이런 양을 $O(1)$ 이라고 표시하면 적분 결과는

$$E(x,t) \propto \frac{|A|^2}{2} (L + O(1))$$

따라서 충분히 큰 길이의 공간을 생각하면 파동 에너지는 시간에 무관하게 $E/L \propto |A|^2$ 로 주어진다. 시간에 대한 적분 결과도 마찬가지로 주어진다.

두 개 이상의 파동이 중첩된 경우의 파동 에너지는 어떻게 주어질까? 시간을 고정시킨 채 공간에 대한 분포가

$$y(x) = A_1 \cos[k_1 x] + A_2 \cos[k_2 x]$$

로 주어지는 파동이 있다고 하자. 에너지 밀도는 $[y(x)]^2$ 에 비례하므로 총 파동에너지는 $E \sim \int (A_1 \cos[k_1 x] + A_2 \cos[k_2 x])^2 dx$ 가 되는데 이를 전개하면

$$E \sim \int (A_1^2 \cos^2[k_1 x] + A_2^2 \cos^2[k_2 x]) dx + 2A_1 A_2 \int \cos[k_1 x] \cos[k_2 x] dx$$

가 된다. 코사인 함수를 전 공간에 대하여 적분하면 $O(1)$ 값밖에 얻을 수 없으므로 위의 적분은 사실상

$$E \sim \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2)$$

와 동일하다. 이른바 “간섭항” $\sim A_1 A_2 \cos[k_1 x] \cos[k_2 x]$ 은 총 에너지에 기여하지 못한다. 하지만 두 파동수 k_1, k_2 가 충분히 가까우면 $k_1 = k - \Delta k$, $k_2 = k + \Delta k$ 로 놓을 수 있고 에너지 밀도는 (논의의 편의를 위해 $A_1 = A_2 = A$ 라고 하겠다)

$$e(x) \sim A^2 \cos^2[(\Delta k)x] \cos^2[kx]$$

로 적힌다. 모든 공간에 대한 적분대신 일정한 구간, l 에 대한 적분을 생각해 보자. 이 구간은 $(\Delta k)l \ll 1$, $kl \gg 1$ 을 만족한다고 하자. 다시 말하면 이 구간 안에서 $\cos^2[(\Delta k)x]$ 는 거의 변하지 않고 $\cos^2[kx]$ 는 이미 여러 주기를 거쳤다고 하자. 적분 결과는

$$\int_{x-l/2}^{x+l/2} e(x) dx \sim A^2 \cos^2[(\Delta k)x]$$

가 된다. 맥놀이하는 파동의 에너지 밀도는 맥놀이의 포장 함수에 의해 결정된다.

달린 공간의 파동 (정상파): 앞서 일반적인 1차원 파동은

$$y(x,t) = \sum_m A_m \cos[k_m(x-vt) + \alpha_n] + \sum_n B_n \cos[k_n(x+vt) + \beta_n]$$

와 같은 중첩 형태로 주어진다고 말하였다. 하지만 양끝이 고정된 (가령 고무줄) 매질에서는 파동이 한 방향으로 계속 진행하는 것이 불가능하고, 양단에 도달한 파동은 되돌아와야 할 것이다. 이와 같은 되돌림 현상도 파동 함수로 표현할 수 있을 것인가 검토해 보자. 두 개의 진행파를 중첩하여

$$y(x,t) = A_R \cos[k(x-vt)] + A_L \cos[k(x+vt)]$$

형태의 파동을 만들었다. 매질의 양끝, $x=0, x=L$ 은 고정되어 있어 이 두 점에서의 진폭은 0이 되어야만 한다. 따라서

$$y(0,t) = (A_R + A_L)\cos[kvt] = 0$$

이면서

$$y(L,t) = A_R \cos[kL - kvt] + A_L \cos[kL + kvt] = 0$$

을 만족해야 한다. 첫 째 식으로부터 $A_L = -A_R$ 을 유도하여, 이를 둘 째 식에 대입하면

$$y(L,t) = A_R (\cos[kL - kvt] - \cos[kL + kvt]) = 0$$

이 된다. 삼각함수 공식을 이용하면 이 조건은 또 다른 조건,

$$\sin[kL]\sin[kvt] = 0$$

과 동일해진다. 이 조건을 모든 시간 t 에 대해 만족해야 하므로 결국 $\sin[kL] = 0$ 이 될 수밖에 없다. 다행히도 사인 함수는 주기적으로 0 값을 갖게 되는데 $kL = \pi \times (\text{정수})$ 가 그 조건을 갖춘다. 따라서 파동수가 임의의 값을 갖지 않고

$$k = \frac{\pi}{L} \times n, \quad n = (\text{정수})$$

이란 특정한, 양자화된 값을 갖게 되면 양단에서 진폭이 0이 되게끔 할 수 있다. 다시 본래의 파동 꼴로 돌아가 보면

$$y_n(x,t) = A [\cos[k_n(x-vt)] - \cos[k_n(x+vt)]] = 2A \sin(k_n x) \sin(k_n vt)$$

형태의 파동이 얻어진다. 닫힌 공간에 가두어진 파동은 고유 파동수 k_n 과 고유 진동수 $\omega_n = vk_n$ 로 진동한다.

닫힌 2차원 공간으로 이 개념을 확장해 보자. 직사각형 모양 $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y$ 으로 만든 북을 생각하면 된다. 이제는 북의 가장자리를 따라 진폭이 0이 되어야 한다. 이와 같은 모양의 정상파를 만들 수 있을까? (숙제!)

문제:

[1] 컴퓨터 프로그램을 이용하여 $y(x,t) = 2A \cos[kx] \cos[(\Delta k)x]$ 를 그리시오.

$A = 0.5, k = 2\pi, \Delta k = 2\pi \times (1/10)$ 값을 이용하시오.

[2] 컴퓨터 프로그램을 이용하여 $h(x,y,t) = A(\cos[r_1 - vt] + \cos[r_2 - vt])$ 함수를 그리시오. 시간은 $t = 0$ 으로 놓아도 좋고, $A = 1$.

[3] 파동 에너지 계산에서와 같이 $\int_0^L dx \cos[2kx - 2\omega t]$ 적분을 수행할 때 그 값은 $O(1)$ 임을 보이시오.

[4] 중첩된 파동

$$y(x) = \sum_n A_n \cos[k_n x]$$

의 에너지 $E \sim \int [y(x)]^2 dx$ 는 $\sum_n (A_n)^2$ 에 비례함을 보이시오.

[4] 직사각형 모양 $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$ 에 갇힌 2차원 파동의 함수 꼴을 적고, 양자화 조건을 논의하시오.

기체 운동론과 통계 역학

도입: 기체, 혹은 이상 기체의 성질은 그 부피(volume, V), 온도(temperature, T), 압력(pressure, p)로 기술된다. 이 양들 사이에는 관계식이 있어

$$pV = nRT$$

라는 이상기체 방정식을 만족한다. 잘 알다시피 n 은 기체의 몰 수, $R = 8.3J/mol.K$ 값을 갖는 기체 상수다. 물론 기체는 무수히 많은 원자로 이루어져있고, 원자들은 서로 끊임없이 충돌하면서 경로를 바꾸고 가속하고 감속한다. 기체를 담은 용기의 벽하고의 충돌도 무시할 수 없다.

수많은 원자의 운동을 어떻게 단순화시켜 이해하면 위와 같은 이상 기체 방정식을 유도할 수 있을까? 베르누이는 이미 1738년 기체가 수많은 분자의 운동으로 이루어져있다고 상상했다고 한다. 기체가 윗벽을 때리면서 힘을 전달하고 이 힘이 벽을 밀어 위에 얹힌 추의 무게와 힘의 균형을 이룬다고 가정하였다. 이 가정을 뉴턴 역학으로 검증하다 보면 이상기체 방정식을 얻게 된다.

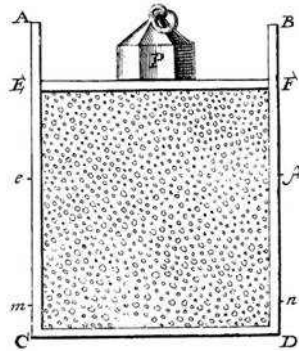
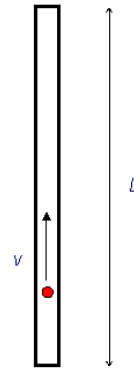


그림 22 베르누이의 기체 모형도 (1738)



1-D gas: particle bounces between ends of cylinder

그림 23 1차원 기체

우선 위의 그림과 같은 1차원 기체의 분자를 생각하고 (압력)=(힘)/(단면적)이란 사실을 기억하자. 속도 $+v$ 로 이동하던 입자가 벽과 탄성 충돌하고 $-v$ 의 속도로 되돌아온다고 하면, 벽에 전달된 운동량은 $\Delta p = 2mv$ 가 된다. 주어진 시간 Δt 사이에 벽에 도달하는 입자의 개수는 $n \cdot A \cdot (v\Delta t)/2$ 가 된다. (위에서는 n 을 이상기체의 몰수로 사용했지만 여기서는 밀도 $n = N/V$ 로 쓰겠다.) 평균적으로 절반의 입자는 $-v$ 의 속도를 갖고 있을 것이고 이들 입자는 윗벽에 도달하지 못하기 때문에 2로 나누어주는 것이다. 벽에 전달되는 총 운동량은

$$(2mv) \times (nAv\Delta t)/2 = mnv^2 A \Delta t$$

가 된다. 이것을 단위 시간으로 나누면 벽에 가해진 힘이 되고, 이 값을 다시 벽의 단면적 A 로 나누면 압력이 되므로,

$$p = mnv^2$$

가 된다. 물론 모든 원자가 동일한 속도로 움직이는 것은 아니다. 어떤 원자는 v 보다 빠른 속도로, 어떤 원자는 느린 속도로 움직일 것이다. 따라서 우리가 원하는 숫자는 모든 원자에 대한 평균값,

$$p = mn \langle v^2 \rangle, \quad \langle v^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2$$

이 된다.

이제까지는 한 방향으로만 운동하는 기체 분자를 가정했다. 실제 기체에서는 분자가 모든 방향으로 움직이고, 모든 방향이 동등하다고 하면

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle (\vec{v})^2 \rangle$$

이 된다. 따라서 압력과 분자의 평균 운동 에너지와의 관계가 성립하는데,

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left(\frac{1}{2} m \langle (\vec{v})^2 \rangle \right).$$

이상 기체 방정식은 이미 실험적으로 잘 검증된 관계식이다. 따라서 지금 유도한 관계식은 이상 기체 방정식과 동일할 수 밖에 없다. 그렇다면 분자의 평균 운동 에너지는

$$\frac{1}{2} m \langle (\vec{v})^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{n}{N} RT.$$

여기서 n 은 다시 분자의 몰 수를 의미하고, 잘 알려진 대로 $N/n = N_A = 6.02 \times 10^{23}$ 는 아보가드로 숫자이다. 다시 말하자면 분자 하나의 평균 운동 에너지는 절대 온도에 비례하는데

$$\frac{1}{2} m \langle (\vec{v})^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} k_B T$$

가 된다. 기체 상수를 아보가드로 숫자로 나눈 값을 볼츠만 상수라고 부르면 그 크기는 $k_B = 1.38 \times 10^{-23} J/K$ 이다.

만약 기체의 운동이 완벽하게 2차원으로만 제한되었다면 압력은 $p = \frac{N}{V} \left(\frac{1}{2} m \langle (\vec{v})^2 \rangle \right)$ 로 주어졌을 것이다. 여전히 2차원 기체에서도 이상 기체 방정식이 성립한다고 치면, 이제 평균 운동 에너지는 $\frac{1}{2} m \langle (\vec{v})^2 \rangle = k_B T$ 로 주어진다는 결론이 나온다. 이렇게 차원 별로 평균 운동 에너지가 달라지는 현상은 간단히 요약할 수 있는데, 각 방향의 운동마다, 즉 자유도마다 $(1/2)k_B T$ 만큼의 평균 “열”운동 에너지가 주어진다는 사실이다. D 차원에서 움직이는 기체 분자는 D 개의 자유도를 갖고 있기 때문에 평균 운동 에너지도 $D \times (1/2)k_B T$ 로 주어지게 된다. 이런 관계식을 등분배 정리(equipartition theorem)이라고 부른다. 등분배 정리를 다시 표현해 보면 기체의 압력과 기체 입자의 총 운동 에너지 U 사이의 비례식이 된다:

$$pV = \frac{2}{D} U, \quad U = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i)^2.$$

그리고 평균 운동 에너지는 주어진 절대 온도 T 에서 온도에 정비례한다:

$$U = ND \times \left(\frac{1}{2} k_B T \right).$$

왜 평균 운동 에너지와 온도 사이에 이런 관계가 성립해야 하는지는 조금 뒤 통계 역학의 원리를 이해하면 설명할 수 있다. 일단은 압력과 총 운동 에너지 사이의 관계식으로부터 기체를 일정 부피만큼 수축하는데 드는 일의 양이 무엇인지 계산해 보자. 기체 상태의 분자와 분자 간격은 워낙에 분자 크기에 비해 멀기 때문에 상호 작용 에너지는 무시할 수 없을 만큼 작다고 한다. 지금까지는 기체 분자를 하나의 점으로 취급했지만 실제 기체 분자는 모양과 이에 따른 내부 운동을 한다. 이런 경우 기체 분자의 자유도는 단지 공간 차원에 일치하지 않고 이보다 커질 수 있다. 따라서 우리는 일반적인 꼴,

$$pV = \frac{2}{D} U$$

을 계속 사용하고자 한다. 기체를 압축시키면서 외부에서 해야 할 일은

$$dW = -pdV$$

이다. 여기서 (-) 부호의 의미는 기체가 수축될 때 외부에서 일을 해야 하고, 팽창할 때는 “기체가 외부로” 일을 한다는 사실을 의미한다. 외부에서 가한 일은 기체 분자들의 운동 에너지 증가로 이어진다. 그런데 만약 기체를 담은 용기가 완벽한 단열재가 아니라면 일부 에너지는 열의 형태로 외부로 다시 빠져나갈 수 있다. 이와 같은 가능성을 배제한, 즉 일이 100% 기체의 내부 에너지로 전환되는 과정을 단열 과정(adiabatic process)라고 한다³⁾.

이상 기체 관계식을 이용하면 $dpV + Vdp = \frac{2}{D}dU$ 가 되고 단열 과정의 경우 $dU = dW = -pdV$

이므로,

$$Vdp + pdV = -p\frac{2}{D}dV \rightarrow Vdp + p\left(1 + \frac{2}{D}\right)dV = 0$$

이다. 양변을 pV 로 나눈 뒤 다시 보면 $d\ln[pV^{1+2/D}] = 0$, 따라서 단열 압축이나 단열 팽창 과정에서 기체의 압력과 부피의 특정한 조합 $pV^{1+2/D}$ 은 변하지 않는다.

이번에는 기체가 압축되거나 팽창하는 과정에서 온도가 일정하게 유지되는 변화를 생각해 보자. 가령 열투과성이 좋은 물질로 만들어진 용기 안에 담긴 기체를 아주 천천히(외부와의 온도 평형이 항상 이루어질 수 있도록) 압축/팽창한다고 하자. 이 경우는 외부에서 한 모든 일이 기체의 운동 에너지로 전환되는 것이 불가능하다. 기체의 운동 에너지 변화는 등분배원리에 따르면 곧 온도 변화를 의미하기 때문이다. 오히려 운동 에너지는 전혀 변하지 않고 (온도가 안 변하니까!) 모든 일은 다시 외부로, 열의 형태로 방출되거나 흡수되어야 한다. 등온 팽창/수축 과정에서는 $dpV + Vdp = \frac{2}{D}dU = 0$ 이어야 하므로 외부에서 한 일은

$pdV + Vdp = -dW + Vdp = 0$ 로 주어지고, 이를 적분해 보면

$$W = \int Vdp = Nk_B T \int \frac{dp}{p} = Nk_B T \times \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

가 된다.

볼츠만 분포: 동일한 온도 T 로 분포된 공기 모형을 생각해 보자. 평형 상태에서의 공기 밀

3) adiabatic은 그리스 어원 a(not)+dia(through)+bainein(to go)에 기초한다. 즉 열이 “통과하지 못한다”란 뜻이다.

도는 높이 h 에 따라 감소하게 되어 있다. 그 이유를 알기 위해 아래 그림을 살펴보자.

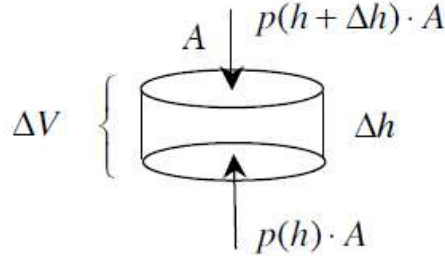


그림 24 공기압 분포 모델

아주 작은 두께의 공기 조각이 평형 상태에 있으려면 이 조각에 가해지는 알짜 힘은 0이어야 한다. 높이 h 와 $h + \Delta h$ 에서의 압력을 각각 $p(h)$, $p(h + \Delta h)$ 라고 하면 공기 조각에 가해지는 알짜힘은

$$[p(h + \Delta h) - p(h)]A + m\rho(h)Ag\Delta h = 0$$

으로 주어진다. 공기 분자 하나의 질량은 m 으로 표시했다. 이로부터 압력의 변화율 dp/dh 과 높이의 의존하는 공기 밀도 $\rho(h)$ 사이의 관계식을 읽어낼 수 있다:

$$\frac{dp}{dh} + \rho g = 0.$$

그런데 이 기체가 이상 기체라고 하면 밀도와 압력 사이에는 $p = \rho k_B T$ 의 관계가 성립해야 한다. 따라서 밀도 함수가 만족하는 미분 방정식을 얻을 수 있게 되는데,

$$\frac{d\rho}{dh} + \frac{mg}{k_B T}\rho = 0.$$

이 식을 적분하면 지수 함수를 얻게 된다:

$$\rho(h) = \rho(0)\exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right).$$

밀도 함수는 공기 분자가 어떤 높이 h 에 “존재할 확률”로도 이해할 수 있다. 위의 식을 다시 해석하면 공기 분자의 존재 확률은 그 분자의 위치 에너지를 열 에너지로 나눈 값에 의해 결정된다.

$$\rho(h) \propto \exp\left(-\frac{\text{위치 에너지}}{\text{열 에너지}}\right).$$

볼츠만 분포는 흔히 이렇게 어떤 물체, 또는 상태의 에너지를 주어진 온도에 해당하는 열 에너지로 나눈 값에 대한 지수 함수를 가리킨다.

위에서 얻은 분포 함수는 주어진 높이에 따른 공기 분자의 존재 확률을 따졌다. 이제 높이를 고정시킨 채 (가령 $h=0$) 같은 높이에 존재하는 공기 분자의 속도 분포에 대해 생각해 보자. 이 속도 분포는 입자의 운동 에너지와 열 에너지의 비율로 주어진다⁴⁾:

$$\rho(\vec{v}) \propto \exp\left(-\frac{m(\vec{v})^2/2}{k_B T}\right)$$

4) 통계 역학의 핵심 원리라고 할 수 있는 이 결과에 대한 증명은 생략한다.

앞서 얻은 높이에 따른 분포 결과와 종합해 보면 공기 분자의 분포 함수는 위치와 속도에 따라 다음과 같이 주어진다고 결론내릴 수 있다:

$$\rho(h, \vec{v}) \propto \exp\left(-\frac{mgh + m(\vec{v})^2/2}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right).$$

간단히 말하면 입자의 분포 함수는 입자의 총 에너지와 열에너지의 비율에 대한 지수 함수로 주어진다.

이 결과로부터 등분배 원리를 수학적 방법으로 유도할 수 있다. 위치 에너지가 동일하거나 무시할 수 있다고 하면, 입자의 속도 분포는 오직

$$\rho(\vec{v}) \propto \exp(-\beta m(\vec{v})^2/2) = \exp(-\beta m v_x^2/2) \exp(-\beta m v_y^2/2) \exp(-\beta m v_z^2/2)$$

로 결정된다. 계산의 편의를 위해 $\beta = 1/k_B T$ 를 도입하였다. 분포 함수는 그 정의 자체가 모든 가능성에 대한 확률을 모두 더한 값이 1이어야 한다. 우선

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \exp(-\beta m v_x^2/2) = \sqrt{\frac{2\pi}{m\beta}}$$

란 적분 결과를 확인할 수 있다(숙제!) 확률 분포 함수로서의 정의를 엄밀히 적용하면

$$\rho(\vec{v}) = \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta m(\vec{v})^2\right)$$

꼴을 얻는다. 이제 이 분포 함수를 이용하여 평균 운동 에너지를 계산해 보면

$$\left\langle \frac{1}{2}m(\vec{v})^2 \right\rangle = \int dv_x dv_y dv_z \left(\frac{1}{2}m(\vec{v})^2\right) \rho(\vec{v}) = \frac{3}{2}k_B T$$

가 된다. 같은 방법으로 각 성분별 에너지의 평균을 취해보면

$$\left\langle \frac{1}{2}m(v_x)^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m(v_y)^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m(v_z)^2 \right\rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

이 된다. 이로써 등분배 법칙에 대한 엄밀한 증명이 마무리되었다.

기체의 비열: 아래 도표는 여러 종류 기체의 비열 값을 측정한 결과이다. 비열이란 주어진 온도 상승을 유도하기 위해 기체에 주입해야 할 열의 양을 말한다. 앞서 우리는 기체의 내부 에너지(운동 에너지의 총 합)가 만족하는 관계식은 주어진 공간 차원 D 에 대해

$pV = \frac{2}{D}U = Nk_B T$ 임을 보였다. 따라서 총 에너지는 $U = \frac{D}{2}Nk_B T$, 그리고 비열은

$$\frac{dU}{dT} = \frac{D}{2}Nk_B$$

로 주어진다. 1몰에 대한 비열은 $C = \frac{D}{2}R$ 이 된다. 여기서 기체 상수 R 은 비열에 대한 일종의 기본 단위 역할을 한다. 따라서 주어진 기체의 1몰 당 비열 값을 R 로 나눈 결과는 차원이 없는 순수한 숫자로 주어지게 되며 이 값은 그 기체의 고유한 특성이라고 볼 수 있다. 그 동안의 논의로 보면 이 값은 기체의 종류에 관계 없이 항상 $D/2 = 3/2$ 가 되어야 하겠지만 실제 실험은 다른 결과를 보여 준다. 관계적으로 이상 기체 식을 아래와 같은 꼴로 표현한다.

$$pV = (\gamma - 1)U = Nk_B T.$$

이렇게 두면 단열 과정에서 pV^γ 값이 항상 일정하게 유지된다는 사실 때문에 γ 를 도입한 것으로 보인다. 아무튼 이렇게 정의를 하고 나면 비열은 $U = (\gamma - 1)^{-1} Nk_B T$ 로부터

$$C/R = (\gamma - 1)^{-1}$$

이고 $\gamma = 5/3 = 1.6$ 이 되어야 한다. 실제 실험 결과는 아래 도표와 같다⁵⁾.

| Gas | T (Celsius) | γ |
|-------------------------------|-------------|-------------|
| He | -180 | 1.660 (5/3) |
| Kr | 19 | 1.68 (5/3) |
| Ar | 15 | 1.668 (5/3) |
| H ₂ | 100 | 1.404 (7/5) |
| O ₂ | 100 | 1.399 (7/5) |
| HI | 100 | 1.40 (7/5) |
| Br ₂ | 300 | 1.32 (7/5) |
| I ₂ | 185 | 1.30 (7/5) |
| NH ₃ | 15 | 1.310 |
| C ₂ H ₆ | 15 | 1.22 |

괄호 안의 숫자는 측정된 γ 값과 유사한 분수를 표시한다. 우선 단원자 분자의 비열 결과는 예상되는 이론치와 매우 유사하다는 점이 눈에 띈다. 또 다른 특징은 2원자 분자들끼리는 비슷한 값을 보이며 이 값은 5/3이 아닌 7/5에 가깝다는 사실이다. 좀 더 크고 복잡한 원자의 비열 값은 또 다른 값을 보인다. 여기서 열거하지 않았지만 주어진 기체의 비열은 온도에 의존하는 함수이다. 대체로 비열은 온도가 감소하면 함께 감소한다. 이런 결과들은 맥스웰의 기체 운동론으로는 도저히 이해할 수 없는 현상들이다.

앞서 기체 운동론을 전개할 때 $U = \frac{D}{2} Nk_B T$ 라는 결과를 얻었고 이를 다시 쓰면

$$U = \frac{1}{2} Nk_B T \times (\text{자유도})$$

라고 할 수 있다. 주어진 기체 원자는 x,y,z 세 방향으로 움직일 수 있는 “자유도”를 갖고 있고 각 자유도 하나 당 $\frac{1}{2} k_B T$ 의 열에너지를 갖고 있다고 해석하면 위 식의 의미가 분명해진다. 따라서 앞서 도입한 γ 는

$$\gamma = \frac{\text{자유도}}{2} + 1$$

의 의미를 갖는다. 만약 주어진 분자의 자유도가 3대신 5라고 하자. 그럼 $\gamma = 5/2 + 1 = 7/2$ 이 되어 앞서 도표에서 본 2원자 기체의 값을 잘 설명하게 된다.

2원자 기체 분자에 추가되는 두 개의 자유도는 무엇일까? 이 두 가지는 다름 아닌 회전 운동으로부터 온다. 2원자 분자가 x-축 방향으로 놓여 있다고 하면, 회전 운동 에너지는

$$E_{\text{회전}} = \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 \text{가 된다. 따라서 볼츠만 확률 분포 함수도}$$

5) Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, 40-8, Table 40-1

$$p(\vec{v}, \omega_y, \omega_z) \propto \exp\left(-\beta \frac{1}{2} m [\vec{v}]^2\right) \exp\left(-\beta \left[\frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2\right]\right)$$

로 바뀐다. 각각의 가우스 적분마다 동일한 값 $\frac{1}{2} k_B T$ 을 에너지 평균으로 줄 테니 결과적으로 에너지의 기대치는

$$\left\langle \frac{1}{2} m [\vec{v}]^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 \right\rangle = 5 \times \frac{1}{2} k_B T$$

가 된다. 이를 일반화하면 어떤 물체의 에너지가

$$E[x_1, \dots, x_N] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N A_i x_i^2$$

와 같이 각 변수 x_i 에 대한 제곱꼴로 의존하는 경우 에너지의 기대치는 항상 $N \times \frac{1}{2} k_B T$ 로 주어짐을 알 수 있다. 이것을 등분배 원리(equipartition theorem)라고 부른다.

이제 자유도의 개념으로 다시 한 번 비열 문제를 들여다보자. 결국 $\gamma - 1 = \text{자유도}/2$ 가 되고 비열은 $C/R = (\gamma - 1)^{-1} = 2/\text{자유도}$ 가 된다. 따라서 매우 큰, 그래서 자유도가 많은 분자의 경우 비열은 1에 수렴해야 한다. 실제 실험에서는 높은 온도에서 1에 가까운 값을 보이는 분자라 할지라도 낮은 온도로 가면 이보다 훨씬 낮은 비열값을 보인다. 마치 온도가 낮아질수록 일부 자유도가 “얼어버리는” 것과 같은 현상이 벌어진다. 낮은 온도에서 자유도가 감소하는 것처럼 보이는 현상을 제대로 설명하려면 양자 역학적인 이해가 필요하다. 가령 어떤 입자의 에너지가 $E = E_0 \times n$, 즉 주어진 에너지 단위 E_0 의 정수배로만 가능하다고 하자. 이 경우 볼츠만 함수는 $P_n \propto \exp(-\beta E_0 \times n)$ 이 되고 평균 에너지는

$$\frac{\sum_n E_0 n \cdot \exp(-\beta E_0 \times n)}{\sum_n \exp(-\beta E_0 \times n)} = E_0 \frac{\sum_n n \cdot x^n}{\sum_n x^n}$$

이 된다. 위에서 $x = \exp(-\beta E_0)$ 이고, 분자는 분모를 미분하여 얻어진다:

$\sum_n n \cdot x^n = x \frac{d}{dx} \sum_n x^n$. 따라서 위 식은

$$U = E_0 x \frac{d}{dx} \log\left(\sum_n x^n\right) = -E_0 x \frac{d}{dx} \log(1-x) = E_0 \frac{x}{1-x} = \frac{E_0}{\exp[\beta E_0] - 1}.$$

위의 함수를 온도에 대해 그려보면 온도가 높은 영역 ($\beta E_0 \ll 1$)과 낮은 영역 ($\beta E_0 \gg 1$)에서의 거동이 상당히 다르다는 것을 알 수 있다. 이 함수로부터 비열을 구해보면 높은 온도에서는 예상대로 상수 값을 갖지만 낮은 온도로 갈수록 그 값이 적어진다.

문제:

[1] 상온에서의 공기 분자의 평균 운동 속도를 어렵해보시오. 온도는 $T = 300\text{K}$ 로 하고, 공기는 모두 질소 분자로 구성되어 있다고 하자.

[2] 적분 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2) = \sqrt{\pi}$ 을 증명하여라. 이를 이용하여

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \exp(-\beta m v_x^2 / 2) = \sqrt{\frac{2\pi}{m\beta}}$$

를 증명하여라.

[3] 내부 에너지 $U(T) = \frac{E_0}{\exp[\beta E_0] - 1}$ 로부터 비열을 구하고 그 결과를 (컴퓨터 계산을

이용하여) 그래프로 그리시오.

[4] 어떤 물질의 온도에 따른 비열 변화를 인터넷에서 검색하여 구하고 출력하시오. 고체 금속, 액체, 기체 분자 중 두 개를 택해서 검색하시오.

[5] 양 끝이 고정된 1차원 줄의 가능한 진동수 값은 $kL = \pi n$ 으로부터 $\omega_n = vk_n = (v\pi/L)n$ 로 양자화되어 있다.